

# طراحی فعالیتی برای درک کسر متعارفی به عنوان یک عدد

مریم بهاء‌لو

کارشناس ارشد آموزش ریاضی

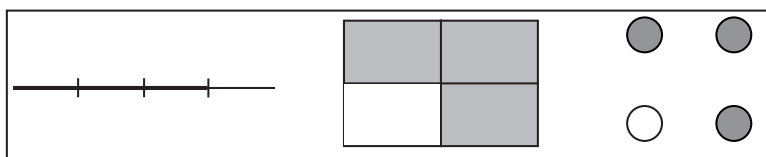
**اشاره**  
به دلیل اهمیت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مجله رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطه نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل درمی‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.  
از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.  
در ضمن، گاهی هم به جای شنیدن روایت از زبان معلم، می‌توان کلاس وی را مورد مشاهده قرار داده و پس از تأیید همان معلم، روایت را از زبان مشاهده‌گر شنید.  
رشد آموزش ریاضی

فعالیتی به صورت مختصر در مقاله‌ای تحت عنوان «نقش فرهنگ در آموزش مفهوم کسر در ریاضی پایه چهارم ابتدایی»، در همایش فرهنگ و برنامه درسی در شهر یور ۱۳۹۵ در دانشگاه بوعلی سینای همدان برگزار شد. در این مقاله، سعی بر آن است که بعد از مروری بر پیشینه، فعالیت ارائه شده در آن همایش، به صورت کامل‌تر و نیز با جزئیات بیشتری، شرح داده شود. این، برای حصول اطمینان از کارایی و عملی بودن و نحوه اجرای این فعالیت در کلاس درس، به نظر سه تن از معلمان ابتدایی رسید و آنان، مراحل کار را دوره کردند.

شواهد پژوهشی حاکی از این هستند که بیشترین تمرکز آموزش مدرسه‌ای، بر کسب دانش رویه‌ای است. دانش‌آموزان معمولاً قواعد را با انجام تمرین‌های تکراری یاد می‌گیرند که این امر در بسیاری موارد، منجر به درک نادرستی از نمادهای ریاضی می‌شود. در نتیجه، بسیاری از اشتباهات دانش‌آموزان در کسر، به دلیل ضعف درک مفهومی‌شان است (گبریل و همکاران، ۲۰۱۳). کرسلیک (۱۹۸۶) استدلال کرده بود که تمرین‌های مدرسه‌ای، به اندازه کافی دانش‌آموزان را به این سمت هدایت نمی‌کنند که کسر را عدد

در نظر بگیرند. از طرف دیگر، انگلیش و هالفورد (۱۹۹۵، نقل شده در آماو، ۲۰۰۵) نیز در مورد اهمیت تمثیل‌ها و استدلال‌ها در کمک به دانش‌آموزان برای ایجاد دانش ریاضی جدید بر پایه دانش قبلی، بحث کردند. از نظر آنان، انتخاب تمثیل‌ها و عملیاتی که روی آن‌ها انجام می‌شود، می‌تواند پیامدهای مهمی در یادگیری ریاضی فرد داشته باشد. برخی تمثیل‌ها حتی می‌توانند نامفهوم یا مبهم باشند، در صورتی که قرار است دانش‌آموزان را در امر یادگیری، یاری دهند. بعضی از تمثیل‌ها، شبیه داستان‌های خیالی‌اند که شاید به دانش‌آموزان کمک کنند که روند کار را به یاد آورند، اما هیچ کمکی به توسعه درک مفهومی آن‌ها نمی‌کنند. (چاپین، ۱۹۹۸، ص. ۶۱۱)

هدف اصلی برنامه درسی ریاضی دوره ابتدایی این است که درک دانش‌آموزان از مفهوم عدد، توسعه یابد تا آن‌ها بتوانند با اطمینان، چنین درکی را در توصیف پدیده‌های دنیای واقعی و حل مسائل به کار گیرند (چیناپان و لاوسون، ۲۰۰۲، به نقل از شورای ملی معلمان ریاضی، ۲۰۰۰؛ شورای آموزش و پرورش استرالیا، ۱۹۹۰). برای این منظور فرودنتال و گراوی میجر (۱۹۹۴)، بر طراحی فعالیت‌های واقعی برای یادگیری ریاضی، تأکید کردند. از نظر آن‌ها فعالیت باید به‌طور مشهود، شامل موضوع و مبحث ریاضی برگرفته از واقعیت باشد. در واقع، بعضی از محققان بر این باورند که افزایش درک دانش‌آموزان از مفهوم کسر، نیازمند طراحی فعالیت‌هایی است که از طریق آن‌ها، بازنمایی‌ها و مدل‌های مختلف نمایش داده شوند (بريجال و همکاران، ۲۰۱۱). در کتاب‌های ریاضی دوره‌های ابتدایی و متوسطه اول، معمولاً از سه مدل خطی، پیوسته و گسسته، برای ارائه کسرها استفاده می‌شود. استفاده از این سه مدل که در شکل (۱) نشان داده شده است، وجه غالب را در کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی دارد (واتانایی، ۲۰۰۲).



شکل ۱. سه مدل خطی، پیوسته و گسسته برای ارائه کسر (نقل شده در واتانابه، ۲۰۰۲)

در کتاب تازه‌تألیف ریاضی پایه چهارم ابتدایی در بخش کسر، با استفاده از فعالیت‌های مختلف، به معرفی عدد مخلوط، مقایسه کسرها با مخرج‌های مساوی و نامساوی، تساوی کسرها و جمع و تفریق کسرها با مخرج‌های مساوی و غیرمساوی پرداخته شده، ولی مفهوم هیچ‌یک به درستی، آموزش داده نشده است. برای این منظور، فعالیت‌های طراحی شد که به دانش‌آموزان کمک کند تا مفاهیم اصلی و عملیات با کسرها را از طریق تقسیم‌بندی به قسمت‌های مساوی، جمع و تفریق و مقایسه کسرها را با مخرج‌های مساوی و نامساوی، یاد بگیرند و در نهایت، قادر شوند که کسر را به عنوان «عدد» درک کنند.

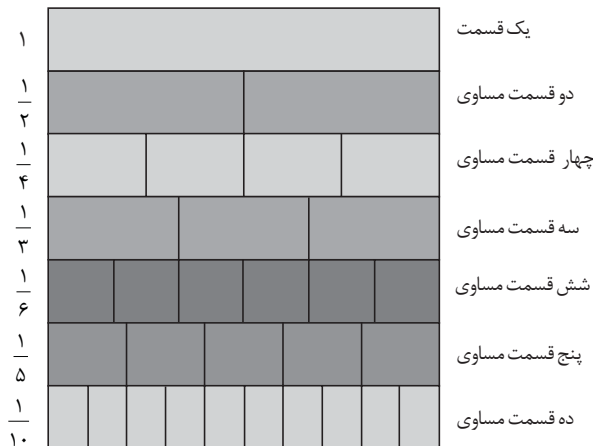
این فعالیت برای ۷ تا ۱۲ جلسه آموزشی، بسته به پیشرفت کلاس، طراحی شده است و نیاز به راهنمایی معلم در مراحل مختلف کار دارد. با انجام این فعالیت، شاید دیگر نیازی به ظرفیت‌های کتاب مانند «حل کردن تمرین» و «کار در کلاس» در فصل کسر، نباشد. پیشنهاد می‌شود برای کارایی بهتر، دانش‌آموزان گروه‌بندی شوند. تجربه معلمان و نویسندگان نشان داده است که برای جلسه اول و دوم، گروه ۳ نفری و برای بقیه جلسات گروه ۵ نفری مناسب است تا دانش‌آموزان بتوانند با یکدیگر مشورت کنند و از نظرهای یکدیگر در رسیدن به جواب، بهره ببرند. گروه‌بندی دانش‌آموزان در سطوح مختلف ضعیف، متوسط و قوی، کمک می‌کند که همه گروه‌ها با هم پیش بروند. معلم گرمای، خودتان را در جایگاه دانش‌آموز چهارم ابتدایی قرار دهید و مرحله به مرحله با ما همراه شوید.

### جلسه اول آموزشی

**موضوع تدریس:** آموزش تقسیم به قسمت‌های مساوی، بیان سهم هر قسمت با عدد کسری و معرفی واحد کامل.

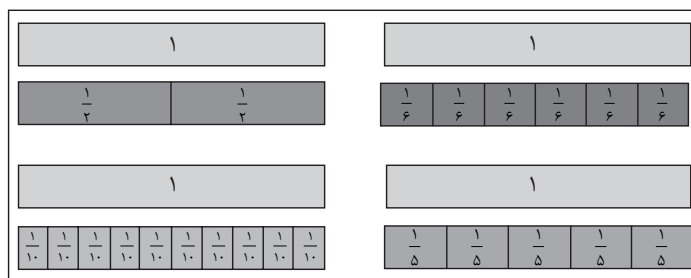
در مرحله اول، مستطیلی به طول ۶۰ واحد و با عرض دلخواه که به هفت بخش پذیر باشد (عددهای پیشنهادی ۴۹ یا ۵۶)، روی کاغذ، مقوا، فوم، یونولیت یا نی (دقت کنید که با انتخاب نی، دیگر عرض کارایی ندارد و از ۷ نی استفاده کنید) یا امثال این‌ها که در اختیار دانش‌آموز قرار دارد، رسم می‌کنیم. به دلیل بزرگی عدد ۶۰، این اندازه‌ها را با استفاده از اِشِل (گونیا ی خیاطی)، رسم می‌کنیم (با استفاده از خط‌کش نیز، می‌توان هر یک سانت را به نیم‌سانت تبدیل کرد). با توجه به اینکه دانش‌آموزان در پایه دوم و سوم، با اندازه‌گیری و تقسیم‌بندی نوارهای کاغذی به قسمت‌های مساوی آشنا شده‌اند، اصولاً با تقسیم‌بندی مشکلی ندارند. از دانش‌آموزان بخواهید در گروه‌هایشان، عرض این مستطیل را به هفت قسمت مساوی تقسیم کنند. در سطر اول، طول بدون تقسیم‌بندی به عنوان واحد کامل در نظر گرفته می‌شود. طول سطر دوم را، با استفاده از جدول ضرب  $(30 \times 2)$  یا با عمل تقسیم دو رقمی بر یک رقمی  $(60 / 2)$ ، به دو قسمت مساوی تقسیم کنند. اگر دانش‌آموزان با مشکل مواجه شدند، معلم می‌تواند در مراحل مختلف کار، با توجه به مطالبی که در پایه‌های قبل آموخته‌اند، آن‌ها را راهنمایی کند. بعد از انجام تقسیم‌بندی، از دانش‌آموزان بخواهید که سهم هر قسمت را مشخص کنند؛ انتظار این است که عدد  $\frac{1}{2}$  را نمایش دهند. دانش‌آموزان با عدد کسری و نمایش آن در پایه سوم آشنا شده‌اند. (اگر از نظر معلم، دانش‌آموز در مرحله تقسیم‌بندی با دشواری مواجه شود، می‌توان شکل (۱) را تکثیر و در اختیار دانش‌آموزان قرار داد). می‌توان دانش‌آموز را به این سمت هدایت نمود که با استفاده از سطر دوم  $(\frac{1}{2})$ ، طول سطر سوم را به چهار قسمت مساوی تقسیم کند و متوجه دو دسته دوتایی  $(2 \times 2)$  شود و به این نتیجه برسد که سهم هر قسمت،  $\frac{1}{4}$  است. منظور این است که هر  $\frac{1}{2}$  را مجدداً به ۲ قسمت مساوی تقسیم کند و به این نتیجه برسد که چگونه  $\frac{1}{4}$  به  $\frac{1}{2}$  تبدیل شده و ارتباط بین این دو کسر را درک کند. به این دلیل که بعداً برای بیان مخرج مشترک‌گیری در جمع و تفریق کسرها، متوجه شود که چرا در جمع دو کسر  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{4}$ ، عدد ۴ به عنوان مخرج مشترک در نظر گرفته می‌شود و به همین نحو، از آن‌ها خواسته شود که طول سطر چهارم را به سه قسمت مساوی تقسیم کنند و سهم هر قسمت را  $\frac{1}{3}$  در نظر بگیرند. با استفاده از سطر چهارم (یعنی سطر  $\frac{1}{3}$  ها)، دانش‌آموزان طول سطر پنجم را به شش قسمت مساوی تقسیم کنند و متوجه سه دسته دوتایی  $(3 \times 2)$  که سهم هر دسته معادل  $\frac{1}{6}$  است، بشوند و نیز با مقایسه سطر دوم (یعنی سطر  $\frac{1}{4}$  ها)، متوجه دو دسته سه تایی  $(2 \times 3)$  شوند و ارتباط بین کسرهای  $\frac{1}{4}$ ،  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{6}$  را نتیجه بگیرند. طول سطر ششم را به پنج قسمت مساوی تقسیم کنند و سهم هر قسمت را برابر  $\frac{1}{5}$  بدانند. سپس از دانش‌آموزان می‌خواهیم با استفاده از سطر ششم (یعنی سطر  $\frac{1}{5}$  ها)، طول سطر هفتم را به ده قسمت مساوی که سهم هر قسمت معادل  $\frac{1}{10}$  است، تقسیم کنند و متوجه پنج دسته دوتایی  $(5 \times 2)$  شوند و نیز با مقایسه با سطر دوم (یعنی سطر  $\frac{1}{4}$  ها)، متوجه دو دسته پنج تایی  $(2 \times 5)$  شوند و به ارتباط بین کسرهای  $\frac{1}{4}$ ،  $\frac{1}{5}$  و  $\frac{1}{10}$  پی ببرند که لازم است این موارد، حتماً با راهنمایی معلم صورت گیرد. در شکل (۲)، نمونه این کار دیده می‌شود. بعد از اتمام تقسیم‌بندی‌ها، می‌توان به واحد کامل نیز اشاره کرد. به این صورت که از دانش‌آموزان بخواهیم ابتدا شکل (۲) را از خطوط عرضی برش بزنند، سپس هر یک از این تکه‌ها را با تکه واحد برابر، مقایسه کنند. مثلاً با چند تکه از  $\frac{1}{6}$  ها، به یک قسمت کامل می‌رسیم؟ و سؤال‌هایی از این قبیل، تا دانش‌آموزان به این نتیجه برسند که  $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ ،  $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ ،  $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ ،  $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$  در این قسمت برای نمونه، واحد کامل را معرفی می‌کنیم که در جلسات آتی، برای بیان عدد مخلوط آن را به کار ببریم. در پایان این فعالیت از دانش‌آموزان بخواهیم که تمام قسمت‌های مشخص شده را روی طول، قیچی کنند. تا اینجا،

منظور این است که  
هر  $\frac{1}{2}$  را مجدداً به ۲  
قسمت مساوی تقسیم  
کند و به این نتیجه  
برسد که چگونه  $\frac{1}{4}$   
به  $\frac{1}{2}$  تبدیل شده و  
ارتباط بین این دو  
کسر را درک کند.  
به این دلیل که بعداً  
برای بیان مخرج  
مشترک‌گیری در  
جمع و تفریق کسرها،  
متوجه شود که چرا در  
جمع دو کسر  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{4}$ ،  
عدد ۴ به عنوان مخرج  
مشترک در نظر گرفته  
می‌شود



شکل ۲. تقسیم‌بندی مستطیل به قسمت‌های مساوی

برای یک جلسه آموزشی طراحی شده است. (بسته به بازدهی کلاس، ممکن است به دو جلسه هم، نیاز باشد) در شکل (۳)، نمونه این کار دیده می‌شود.



شکل ۳. مقایسه واحد کامل با قطعه‌های عرضی متفاوت

## جلسه دوم آموزشی

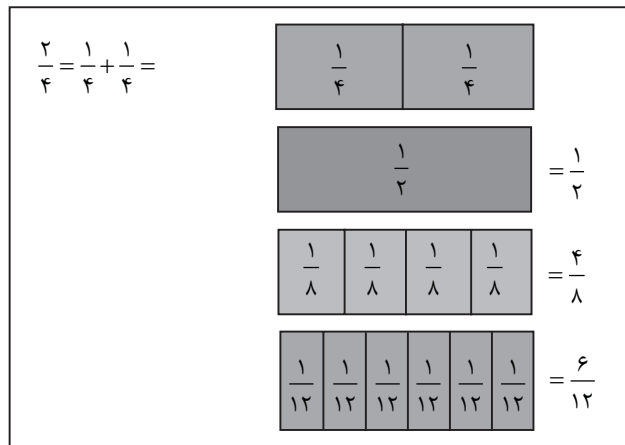
**موضوع تدریس:** آموزش مفاهیم جمع کسر با مخرج‌های برابر و کسر مساوی.

به عنوان مثال، می‌خواهیم  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$  را محاسبه کنیم. برای انجام این کار، از دانش‌آموزان می‌خواهیم در گروه‌هایشان، با استفاده از قطعه‌های بریده شده، دو قطعه  $\frac{1}{4}$  را کنار یکدیگر قرار دهند، و  $\frac{1}{4}$  تا  $\frac{1}{4}$  را ببینند و به کار بردن قطعات دیگر، با حدس و آزمایش قطعه یا قطعه‌هایی که دو قطعه  $\frac{1}{4}$  را می‌پوشانند (برای بیان کسر معادل)، بیابند. در نهایت برای این مثال، ایده آل این است که به این نتیجه برسند که  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{2}{4}$  معادل یکدیگرند که این مرحله، زمینه‌سازی برای جمع دو عدد کسری با مخرج‌های غیرمساوی است. پس از انجام این مرحله، از دانش‌آموزان بخواهیم که مثال‌ها و نمونه‌های بیشتری را مطرح کنند و به دنبال پاسخ آن‌ها باشند. (در حین کار هر جا که دانش‌آموزان با کمبود قطعه مواجه شدند، می‌توانند قطعه‌های جدیدی بسازند). در این قسمت، هدف اصلی این است تا به این نکته پی ببرند که زمانی که مخرج کسرها برابرند، فقط صورت‌های کسر با همدیگر جمع می‌شوند و در بیان کسر معادل، ارتباط بین مخرج‌های کسر را بیابند. آخر سر، از دانش‌آموزان خواسته شود که بدون استفاده از قطعه، جمع کسرهای با مخرج‌های مساوی و کسرهای معادل را بیابند و مثال‌های متنوعی را مطرح و پاسخ دهند. معمولاً دانش‌آموزان از به کار بردن اعداد بزرگ در صورت و مخرج کسرها هراسانند. برای رفع این مشکل، مثال‌هایی می‌زنیم (مانند  $\frac{11}{110}$ ، و  $\frac{120}{480}$  غیره) و به کمک دانش‌آموزان، به حل آن می‌پردازیم. نمونه این کار، در شکل (۴)، نشان داده شده است.





دانش آموز می تواند از بین این دو مورد، یکی را انتخاب کند. می توان دانش آموز را به این سمت هدایت کرد که ۲۴، ضربی از ۱۲ است (۱۲×۲) و برای انتخاب مخرج مشترک، بهتر است کوچک ترین عدد مشترک در مخرج را انتخاب کرد. نمونه کار در شکل (۵) دیده می شود. بعد از درک این مطلب، در نهایت از دانش آموزان بخواهید بدون استفاده از قطعه ها، جمع دو عدد کسری را با استفاده از کسر معادل یا مضرب اعداد، بیابند (از هر روشی که خود دانش آموز به آن پی برده است). از آنان بخواهید تا مثال های متنوعی با اعداد بزرگ در صورت و مخرج کسر، بزنند و با کمک یکدیگر، به حل آن ها بپردازند. بعد از اینکه اطمینان حاصل کردید دانش آموزان این مبحث را آموخته اند، در جلسه بعد می توانید ساده کردن کسرها را مطرح کنید. مثلاً با استفاده از  $\frac{1}{12}$  یا  $\frac{2}{24}$  که دانش آموزان در عملیات قبلی به این نتیجه رسیدند، از آنان بخواهیم که کسره های معادل با هر عدد کسری را بیابند با این تفاوت که در مرحله قبلی صورت و مخرج را در یک عدد ضرب می کردند، حالا از آن ها می خواهیم عکس آن را انجام دهند، یعنی صورت و مخرج را به یک عدد تقسیم کنند. برای کسر  $\frac{1}{12}$ ، با یک مرحله تقسیم به کسر  $\frac{5}{6}$  می رسند و برای کسر  $\frac{2}{24}$ ، با دو مرحله تقسیم و رسیدن به  $\frac{1}{12}$  و  $\frac{5}{6}$ ، به کسر مورد نظر می رسند. اگر دانش آموزان با تقسیم صورت و مخرج کسر به یک عدد مشکل دارند، می توان کسرهایی مانند  $\frac{3}{6}$  یا  $\frac{2}{4}$  را برایشان مثال زد و با استفاده از قطعه ها از آن ها خواست که کسره های معادل را بیابند و این بار، یک عدد کسری را برگزینند که مخرج کوچک تری دارد. سپس ارتباط بین کسر انتخابی و کسر اصلی را پیدا کنند و به کسر  $\frac{1}{4}$  برسند، مانند شکل (۶).

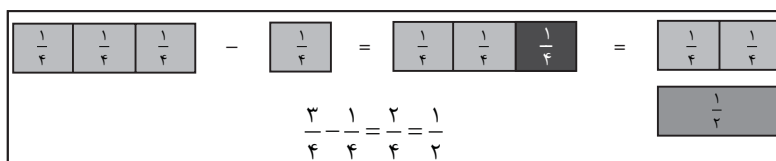


شکل ۶: نمایش مراحل کسر معادل

### جلسه پنجم آموزشی

موضوع تدریس: آموزش تفریق دو کسر با مخرج های مساوی.

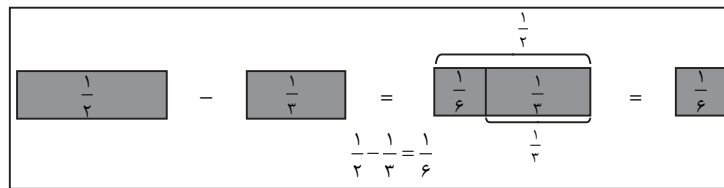
به عنوان مثال، می خواهیم  $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$  را محاسبه کنیم، برای انجام این کار، از دانش آموزان می خواهیم با استفاده از قطعه های بریده شده، ابتدا قطعه  $\frac{3}{4}$  را بسازند، سپس قطعه  $\frac{1}{4}$  را روی قطعه  $\frac{3}{4}$  قرار دهند و با به کار بردن قطعات دیگر، با حدس و آزمایش، قطعه یا قطعه هایی که فضای باقی مانده را پر می کنند، بیابند.



شکل ۷: نمایش تفریق دو عدد کسری با مخرج مساوی

## جلسه ششم آموزشی

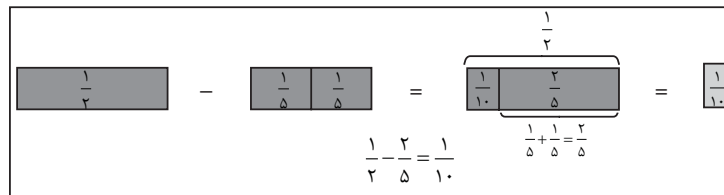
موضوع تدریس: آموزش تفریق دو کسر با مخرج‌های غیر مساوی. نمونه این کار در شکل (۸)، دیده می‌شود.



شکل ۸. نمایش تفریق دو عدد کسری با مخرج‌های غیر مساوی

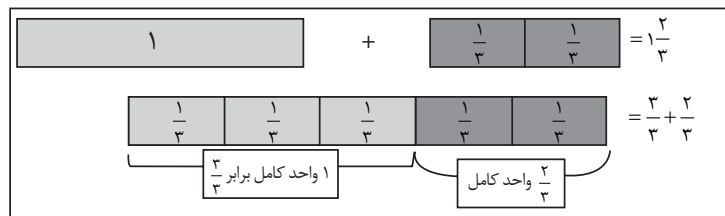
## جلسه هفتم آموزشی

موضوع تدریس: ترکیب عمل جمع و تفریق کسرها و بیان عدد مخلوط. می‌توان جمع و تفریق کسرها را با یکدیگر ترکیب کرد. مانند شکل (۹).



شکل ۹. نمایش ترکیب جمع و تفریق دو عدد کسری با مخرج‌های غیر مساوی

برای بیان عدد مخلوط نیز می‌توان از این فعالیت استفاده نمود. بدین صورت که مثلاً برای بیان عدد  $1\frac{2}{3}$ ، با توجه به جلسه اول آموزشی که دانش‌آموزان با واحد کامل آشنا شده‌اند، می‌توان از آنان پرسید که یک واحد کامل با چند قطعه  $\frac{1}{3}$ ، پر می‌شود. انتظار این است که دانش‌آموزان، به این نتیجه برسند که برای این نمونه،  $1 = \frac{3}{3}$  است. پس مانند شکل (۱۰)، از آنان خواسته شود که این چیدمان را درست کنند. با انجام مثال‌های مختلف، انتظار می‌رود دانش‌آموزان درک کنند که تفاوت واحد کامل، برابر چه عدد کسری است.



شکل ۱۰. نمایش عدد مخلوط

## پروژه تحقیقی

به‌عنوان حسن ختام این فعالیت و به‌عنوان پروژه تحقیقی، از دانش‌آموزان خواهیم پاسخ این سؤال را با جست‌وجو در کتاب‌ها و اینترنت و مصاحبه با دیگران، بیابند که «کاربرد اعداد کسری در زندگی روزانه ما چیست و چگونه از آن‌ها استفاده می‌کنیم؟»

انتظار می‌رود در پایان این فعالیت، دانش‌آموزان علاوه بر اندازه‌گیری و تقسیم‌بندی به قسمت‌های مساوی، قادر به انجام عملیات روی کسرها - هم با استفاده از شکل و هم بدون آن - باشند. این عملیات شامل مقایسه کسرها، جمع و تفریق اعداد کسری با مخرج‌های مساوی و غیر مساوی، کسر برابر واحد، تساوی کسرها و ساده کردن کسرها است. هدف غائی این فعالیت این است که دانش‌آموزان به این موضوع پی ببرند که خود  $\frac{a}{b}$ ، یک عدد است که «عدد کسری» نامیده می‌شود، که صورت و مخرج آن، عددهای صحیح هستند، نه اینکه دو عدد صحیح مجزا به روی هم، کسر را تشکیل می‌دهند.

## تشکر و قدردانی

بر خود لازم می‌دانم از استاد عالیقدرم سرکار خانم دکتر زهرا گویا که مرا در زمینه تکمیل و تصحیح این مقاله یاری نمودند، تشکر نمایم.

## منابع

1. Amato, S. (2005). Developing Students' Understanding of the Concept of Fractions as Numbers. In H. L. Chick, & J. L. Vincent (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 49-56. Mel-bourne: PME.
2. Brijlall, D.; Maharj, A.; & Molebale, J. (2011). Understanding the Teaching and Learning of Fractions: A South African Primary School Case Study. *US-China Education Review*, pp. 497-510, DAVID.
3. Chinnappan, M.; & Lawson, M. (2002). Year 3 Children's Understanding of Fractions: Are We Making Progress? In B. Barton, K. Irwin, M. Pfannkuch & M. Thomas (Eds.), *Proceedings of the 25th Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, vol. 1 pp. 195- 202. Auckland, New Zealand: Mathematics Education Group of Australasia. MERGA.
4. Gabriel, F.; & Coché, F.; & et al. (2013). A Componential View of Chil-dren's Difficulties in Learning Fractions. *Frontiers in Psychology*, V. 4; NCBI. Published online 2013 Oct 10. Doi: 10.3389/fpsyg.2013.00715. PMID: PMC3794363.
5. Watanabe, T. (2002). Representations in Teaching and Learning Fraction. *Teaching Children Mathematics*, pp. 457- 463, NCTM.